Specialieji analizės skyriai

•

Specialieji analizės skyriai

- Kompleksinio kinamojo funkcijų teorija
- Furje eilutės ir Furje integralai
- Operacinis skaičiavimas
- Lauko teorijos elementai

Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija

1. Kompleksinių skaičių aibės. Kompleksinio kintamojo funkcija. Riba. Išvestinė. Analizinės funkcijos. Koši ir Rymano sąlygos. Laplaso lygtis. Harmoninės funkcijos.

2. Laipsninė funkcija. Rodyklinė funkcija. Trigonometrinės ir hiperbolinės funkcijos. Logaritminė funkcija. Apibendrintoji laipsninė funkcija.

3. Integralo apibrėžimas, savybės, skaičiavimas, įvertinimas. Koši integralinė teorema. Koši teorema daugiajungei sričiai. Koši integralinė formulė. Analizinių funkcijų aukštesniųjų eilių išvestinės. Koši nelygybė. Liuvilio teorema. Moreros teorema.

4. Kompleksinių skaičių sekos ir eilutės. Konvergavimo požymiai. Laipsninės eilutės. Teiloro ir Makloreno eilutės.

5. Analizinės funkcijos nuliai. Lorano eilutė. Ypatingieji taškai. Rezidiumai ir jų taikymas.

Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija. Literatūra.

- A. Krylovas, J. Raulynaitis. Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija, V.: Technika, 2006
- A. Nagelė, L. Papreckienė. Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija, V., 1996
- A. Kabaila, P. Rumšas. Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija, V.: Mintis, 1971
- A. Barauskas, Z. Navickas, V. Tėvelis. Kompleksinio kintamojo funkcijos ir operacinis skaičiavimas. V.: Mokslas, 1986
- М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, М., 2002
- E. Kreyszig, Anvanced engineering mathematics, 2006

- P. Alekna. Kompleksinio kintamojo funkcijų teorijos uždavinynas, ŠU, 2006
- A. Krylovas. Kompleksinio kintamojo funkcijų teorijos savarankiško darbo užduotys. Sprendimai ir atsakymai. V.: Technika, 1996
- A. Nagelė, L. Navickaitė. Kompleksinio kintamojo funkcijų teorijos uždaviniai, V., 1975
- A. Nenortienė, Z. Navickas, I. Pranevičienė. Kompleksinio kintamojo funkcijų teorijos uždavinynas, V., 1985

Furjė eilutės ir Furjė integralai

1. Trigonometrinė Furjė eilutė. Funkcijų su periodu 2L Furjė eilutės. Lyginių ir nelyginių funkcijų Furjė eilutės.

2. Funkcijų išreiškimas Furjė eilute atkarpoje [0, L]. Furjė eilutės kompleksinė forma.

3. Furjė integralas. Kompleksinė Furjė integralo forma. Furjė transformacija.

Furjė eilutės ir Furjė integralai. Literatūra

- E. Bajorūnas, N. Janušauskaitė, V. Vėteris. Furjė eilutės, K., 1988

- V. Pekarskas, Trumpas matematikos kursas. - Kaunas, Technologija, 2006

- V. Iljinas, E. Pozniakas. Matematinės analizės pagrindai, V.: Mokslas, 1981, t.2, sk.X

- Г. П. Толстов, Ряды Фурье, М., Наука, 1980

- E. Kreyszig, Anvanced engineering mathematics, 2006

Operacinis skaičiavimas

1. Laplaso transformacija. Tiesiškumo teorema. Panašumo teorema. Postūmio teorema. Vėlavimo teorema. Egzistavimo ir vienaties teorema. Išvestinės ir integralo transformacijos. Laplaso transformacijos diferencijavimas ir integravimas.

2. Sąsuka. Sąsukos Laplaso transformacija. Diuamelio formulė. Atvirkštinė Laplaso transformacija. Atvirkštinės transformacijos skaičiavimas.

3. Laplaso transformacijos taikymai. Integralinės lygtys. Tiersninės diferencialinės lygtys su pastoviais koeficinetais. Tiesinių diferencialinių lygčių sistemos.

Operacinis skaičiavimas. Literatūra

- J. Rimas. Operacinis skaičiavimas, K.: Technologija, 2006
- E. Dagienė, E. Kirjackis, A. Krylovas. Operacinis skaičiavimas. V.: Technika, 2000
- A. Barauskas, Z. Navickas, V.Tėvelis. Kompleksinio kintamojo funkcijos ir operacinis skaičiavimas. V.: Mokslas, 1986
- E. Kreyszig, Anvanced engineering mathematics, 2006
- П. И. Романовский, Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа, М., Наука, 1973

Lauko teorijos elementai

1. Skaliarinis laukas. Vektorinis laukas. Gradientas. Kryptinė išvestinė. Potencialai..

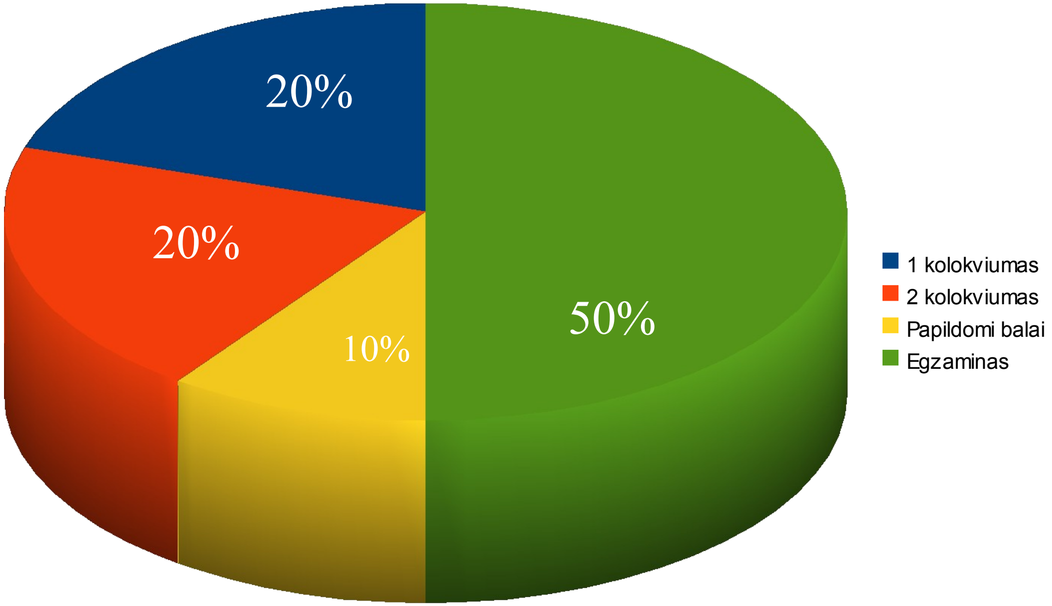
2. Divergencija. Rotorius. Kreiviniai integralai. Gryno teorema. Paviršiniai integralai. Gauso-Ostrogradskio teorema.

3. Lauko teorijos taikymai. Stokso teorema.

Lauko teorijos elementai. Literatūra

- E. Kirjackis, B. Kryžienė. Lauko teorijos pagrindai, V.: Technika, 1996
- E. Kirjackis, B. Kryžienė. Lauko teorijos elementai, V.: Technika, 1998 (tęsinys)
- V. Iljinas, E. Pozniakas. Matematinės analizės pagrindai, V.: Mokslas, 1981, t.2, sk. V-VII
- I. Pranevičienė, H. Pranevičius, Lauko teorija, K., Technologija, 2004
- E. Kreyszig, Anvanced engineering mathematics, 2006
- М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренко. Векторный анализ, М.: Наука, 1978
-
- P. Alekna, Kelių kintamųjų funkcijų integralai (dvilypiai, trilypiai, kreiviniai, paviršiniai): uždavinynas, Š., ŠU, 2003
- V. Liutikas, A. Miliušas, E. Vakrina, Daugialypiai, kreiviniai ir paviršiniai integralai: uždavinių rinkinys, V., VISI, 1985

Vertinimo tvarka



Papildomi balai

Kompleksinio skaičiaus apibrėžimas

- Tarkime, A – aibė, kurioje apibrėžta algebrine operacija $\circ$.

$$\forall a, b \in A: \quad a \circ b = c \in A.$$

- Šiuo atveju sakoma, kad aibė A yra uždara operacijos $\circ$ atžvilgiu.

	$+$	$-$	$\cdot$	$/$	$\sqrt[2n]{\ }$	$\sqrt[2n+1]{\ }$
$\mathbb{N}$						
$\mathbb{Z}$						
$\mathbb{N}$						
$\mathbb{Q}$						
$\mathbb{Q} \setminus \{0\}$						
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$						

Kompleksinio skaičiaus apibrėžimas

- Realiųjų skaičių aibėje negalima ištraukti lyginio laipsnio šaknies iš neigiamo skaičiaus. Pvz.,

$$\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$$

- Arba, kas yra tas pats, negalima išspręsti lygtį

$$z^2 + 2 = 0 \tag{1}$$

- Realiųjų skaičių aibę **R** galima praplėsti iki kompleksinių skaičių aibės **C**, kuri yra uždara visų keturių aritmetinių veiksmų atžvilgiu ir kurioje galima išspręsti (1) lygtį.

Kompleksinio skaičiaus apibrėžimas

- Pažymėkime **C** realiųjų skaičių porų aibę:

$$\mathbb{C} = \{(a, b): a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}.$$

- Šioje aibėje **sudėtis** ir **daugyba** apibrėžiami taip:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

- Aibė **C** elementai vadinami **kompleksiniais skaičiais**.

Kompleksinio skaičiaus apibrėžimas

- Bet kurio kompleksinio skaičiaus (x,y) **priešingasis** skaičius $(-x, -y)$ apibrėžiamas taip:

$$(x\,,\ y)+(-x\,,\ -y)=(0,\ 0).$$

- Skaičius (0,0) vadinamas **kompleksiniu nuliu**.

- Bet kurio nenulinio kompleksinio skaičiaus (x,y) **atvirkštinis** kompleksinis skaičius $(x,y)^{-1}$ apibrėžiamas taip:

$$(x\,,\ y)\cdot(x\,,\ y)^{-1}=(1,\ 0).$$

- Iš šių apibrėžimų gauname kompleksinių skaičių atimties ir dalybos formules.

Kompleksinio skaičiaus apibrėžimas

- Kompleksinių skaičių atimties formulė:

$$(a\,,\,b)-(c\,,\,d)=(a\,,\,b)+(-c\,,\,-d)=(a-c\,,\,b-d).$$

- Kompleksinių skaičių **dalybos** formulė:

$$(a\,,\,b):(c\,,\,d)=(a\,,\,b)\cdot(c\,,\,d)^{-1}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

- Kodėl taip?

Kompleksinio skaičiaus apibrėžimas

- Kas yra $(c,d)^{-1}$? Pažymėkime $(c,d)^{-1} = (x,y)$. Pagal apibrėžimą,

$$(c,\ d)\cdot(x,\ y) = (1,\ 0) \ \Rightarrow\ (c\,x - d\,y,\ c\,y + d\,x) = (1,\ 0).$$

- Gaunome tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} c\,x - d\,y & = 1 \\ d\,x + c\,y & = 0 \end{cases} \Rightarrow\ x = \frac{c}{c^2 + d^2},\quad y = \frac{-d}{c^2 + d^2}.$$

- Taigi,

$$(x,\ y) = (c,\ d)^{-1} = \left(\frac{c}{c^2 + d^2},\ \frac{-d}{c^2 + d^2}\right).$$

Kompleksinio skaičiaus apibrėžimas

- Turime, kad

$$(a\,,\ b):(c\,,\ d)=(a\,,\ b)\cdot(c\,,\ d)^{-1}=(a\,,\ b)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2},\ \frac{-d}{c^2+d^2}\right).$$

- Pritaikę kompleksinių skaičių daugybos apibrėžimą

$$(a\,,\ b)\cdot(p\,,\ q)=(a\,p-b\,q\,,\ a\,q+b\,p),$$

gauname,

$$(a\,,\ b):(c\,,\ d)=\left(\frac{a\,c+b\,d}{c^2+d^2},\ \frac{b\,c-a\,d}{c^2+d^2}\right).$$

- Matome, kad kompleksinių skaičių aibė yra uždara keturių aritmetinių veiksmų atžvilgiu.

Kompleksinio skaičiaus apibrėžimas

- Išnagrinėkime aritmetinių veiksmų išvestas formules, tuo atveju, kai kompleksinio skaičiaus antroji komponentė yra lygi nuliui. Turime

$$(a\,,\,0) \pm (c\,,\,0) = (a \pm c\,,\,0),$$

$$(a\,,\,0) \cdot (c\,,\,0) = (a\,c\,,\,0),$$

$$(a\,,\,0) : (c\,,\,0) = \left(\frac{a}{c}\,,\,0\right).$$

- Matome, kad skaičių (x,0) aibė sutampa su realiųjų skaičių aibe. Taigi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ir (1,0) ≡ 1 yra realusis vienetas .

Kompleksinių skaičių sekos

- Tarkime, kad $\{z_n\}$ – kompleksinių skaičių seka. Skaičius z_0 vadinamas k.s. sekos riba, jei bet kokiam $\varepsilon > 0$ egzistuoja N toks, kad visi sekos nariai su numeriais $n > N$, tenkina nelygybę $|z_n - z_0| < \varepsilon$. Rašoma

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

- Kai riba egzistuoja, sakoma, kad seka konverguoja. Priešingai – diverguoja.

- K. s. seka $\{z_n\}$ konverguoja tada ir tik tada, kai konverguoja sekos $\{\mathbf{Re}\, z_n\}$, $\{\mathbf{Im}\, z_n\}$.

- Kompleksinių skaičių sekų riboms būdingos šios savybės:

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \pm \lim_{n\to\infty} w_n$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n w_n = \lim_{n\to\infty} z_n \lim_{n\to\infty} w_n$$

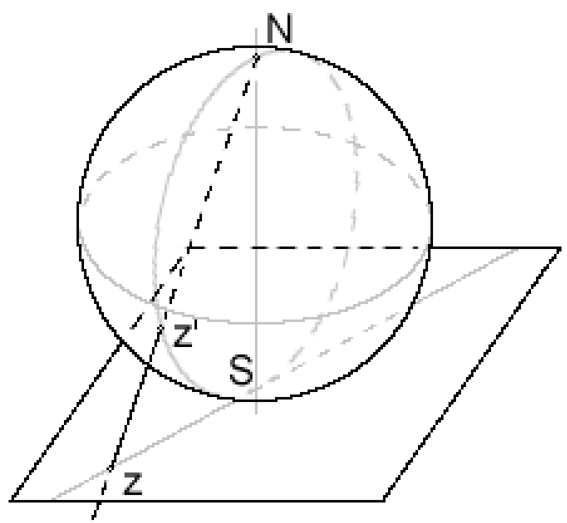
$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} w_n}$$

Kompleksinių skaičių sfera

- Kompleksinių skaičių sekos $\{z_n\}$ riba vadinama <u>begalybe</u>, kai šios sekos narių modulių riba yra ∞, t.y., kai

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$$

- Kokia yra šios lygybės geometrinė prasmė?



- Stačiakampėje koordinačių sistemoje (u, v, t) nubrėžkime sferą (<u>Rymano sfera</u>), kurios centras yra taške (0, 0, ½) ir spindulys – ½. Sferos taškas N(0, 0, 1) vadinamas <u>šiaurės poliumi</u>. Kompleksinė plokštuma (z) sutampa su $u0v$.

Kompleksinių skaičių sfera

- Tiesės, jungiančios kompleksinės plokštumos tašką z su šiaurės poliumi N, ir sferos sankirtos taškas vadinamas taško z <u>stereografiniu vaizdu</u>.

- Stereografinio vaizdo z' (u, v, t) koordinates apskaičiuojamos pagal formules:

$$u=\frac{x}{1+x^2+y^2} \qquad v=\frac{y}{1+x^2+y^2} \qquad t=\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$$

- Žinant stereografinio vaizdo koordinates, tašką z randame pagal formules:

$$x=\frac{u}{1-t} \qquad y=\frac{v}{1-t}$$

- Taigi, kiekvieną sferos tašką z', išskyrus šiaurės polį, atitinka *baigtinis* taškas z. Todėl Rymano sferos šiaurės polis laikomas <u>be galo nutolusio</u> kompleksinės plokštumos taško $z = \infty$ stereografiniu vaizdu.

- Kompleksinių skaičių aibės C ir taško $z = \infty$ sąjunga $C \cup \{\infty\}$ <u>vadinama išplėstine kompleksine plokštuma</u>. Žymima

$$\bar{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\infty$$

Kompleksinio kintamojo funkcijos sąvoka

- Tarkime, kad kiekvieną aibės $D \subset \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ tašką atitinka vienas, keli, arba be galo daug kompleksinių skaičių $w = f(z)$. Gali būti ir $w = \infty$. Tada sakoma, kad aibėje D apibrėžta <u>kompleksinio kintamojo *z* funkcija</u> $w = f(z)$.

- Jei kiekvieną z atitinka tik viena reikšmė w, tai funkcija $w = f(z)$ vadinama vienareikšme.

- Kompleksinių skaičių aibė D, kurioje apibrėžta funkcija $w = f(z)$ vadinama <u>funkcijos apibrėžimo aibe</u>.

- <u>Funkcijos reikšmių aibe</u> vadinama aibė

$$\boldsymbol{G} = \{ w : w = f(z), z \in \boldsymbol{D} \}$$

Kompleksinio kintamojo funkcijos sąvoka

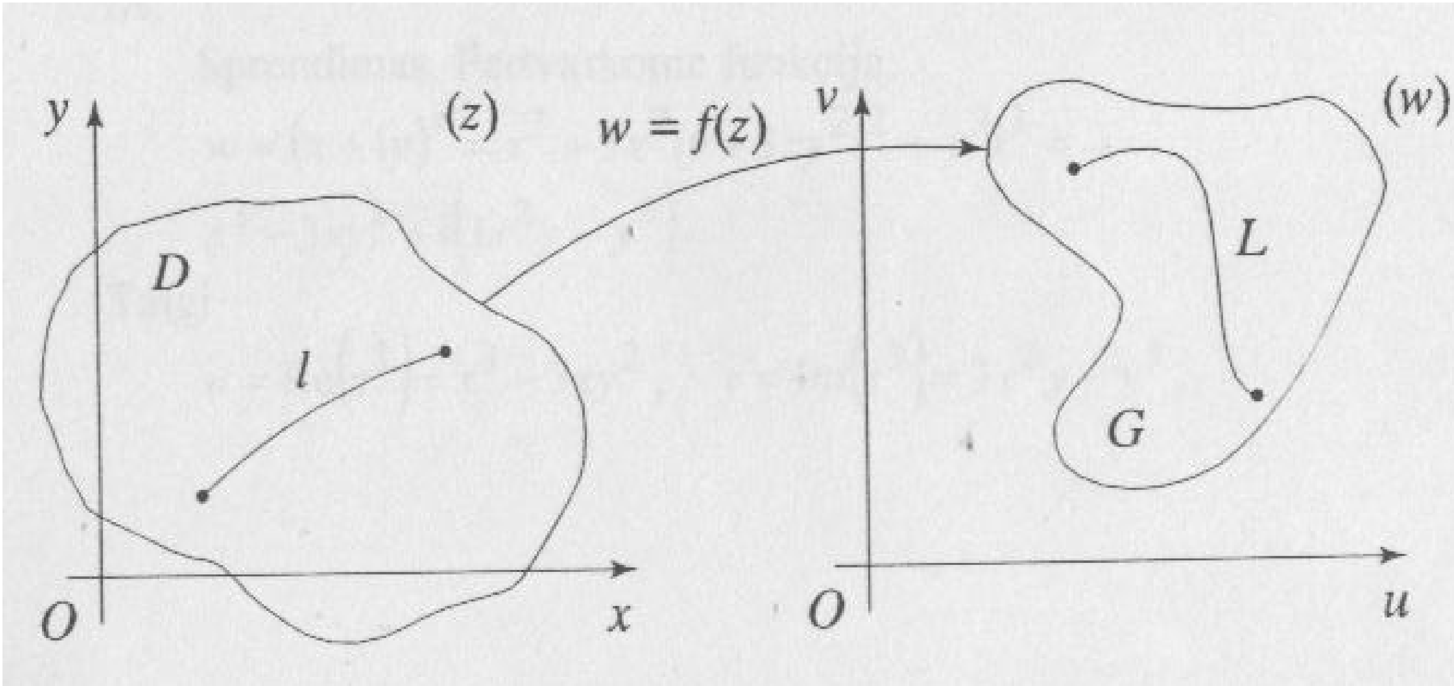
- Pažymėjus $z = x + iy$ ir $w = u + iv$, galima išskirti kompleksinio kintamojo funkcijos realiąją dalį ir menamąją dalį:

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

$$u(x,y) = \Re f(z), v(x,y) = \Im f(z)$$

- Taigi, kompleksinio kintamojo funkciją galima apibrėžti dviem realiųjų kintamųjų x ir y realiosiomis funkcijomis $u(x,y)$ ir $v(x,y)$.

Kompleksinio kintamojo funkcijos geometrinis vaizdavimas



• Kiekvieną funkcijos apibrėžimo aibės D tašką z atitinka taškas $w = f(z)$ (vaidas): funkcija $f(z)$ vaizduoja aibę D į aibę G.

• Tarkime, kad $z = z(t)$, $t_1 \le t \le t_2$ yra kreivė l srityje D. Tada šios kreivės taškai atvaizduojami į srities G kreivės L taškus,

$$\boldsymbol{L} = \{ w : w = f(z), z \in \boldsymbol{l} \}$$

Laipsninė funkcija

- Laipsnine vadinama funkcija

$$w = z^n,\ n \in \mathbb{N}$$

- Ši funkcija yra vienareikšme,

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{G} = \overline{\mathbb{C}}$$

Kompleksinių skaičių eilutės

- Tegu $\{z_k\}$ – kompleksinių skaičių seka. Seka $\{s_n\}$,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k ,$$

vadinama kompleksinių skaičių eilutės

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

dalinių sumų seka.

- Sakoma, kad kompleksinių skaičių eilutė konverguoja, ir jos suma lygi kompleksiniam skaičiui S, jei egzistuoja riba

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

Kompleksinių skaičių eilutės

- Eilutė konverguoja tik tada, kai konverguoja realiųjų skaičių eilutes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Re z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Im z_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

- Tarkime, kad konverguoja realiųjų skaičių eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

Pastebėję, kad $|x_n| \leq |z_n|$ ir $|y_n| \leq |z_n|$, gauname, kad eilutės $\sum |x_n|$ ir $\sum |z_n|$ absoliučiai konverguoja. Tada konverguoja ir eilutė $\sum z_n$ ir sakoma, kad ji konverguoja <u>absoliučiai</u>.

- Tarkime, kad $\{c_n\}$ yra kompleksinių skaičių seka. Tada laipsninė eilutė $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

konverguoja absoliučiai skritulyje $|z| < R$. Šio skritulio spindulį R galima rasti, eilutei

$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z^n|$ taikant Dalambero arba Koši konvergavimo požymius.

Trigonometrinės ir hiperbolinės funkcijos

-

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sinh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Logaritminė funkcija

- Apibrėžkime funkciją w = Ln z kaip lygties $z = e^w$ sprendinį.

- Pažymėję $w = u+iv$, gauname

$$z = e^u e^{iv} = |z| e^{i(\arg z + 2\pi k)}, k \in \mathbb{Z}$$

- Todėl,

$$u = \ln|z|, v = \arg z + 2\pi k,$$

$$w = Ln\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k).$$

- Taigi, Ln z turi be galo daug reikšmių. Kai $k = 0$, gauname <u>pagrindinę logaritmo reikšmę</u>:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

- Funkcija ln z yra vienareikšmė. Kai $z = x > 0$, tai ln z = ln x.

Apibendrintoji laipsninė funkcija

- Apibendrintoji laipsninė funkcija apibrėžiama taip:

$$w = z^a = e^{a\,Ln\,z},$$

čia *z*, *a* – kompleksiniai skaičiai

Atvirkštinės funkcijos

- Išspręskime lygtį tg $w = z$. Gausime

$$w = \frac{1}{2i} Ln \frac{1+iz}{1-iz} = Arctg\, z$$

- Panašiai apibrėžiamos kitos kompleksinio kintamojo z daugiareikšmės atvirkštinės funkcijos, areasinusas, areacosinusas, areakotangentas, it kt.:

$$Arcsin\, z = -i\, Ln\left(i z + \sqrt{1-z^2}\right)$$

$$Arccos\, z = -i\, Ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$Arcctg\, z = \frac{-1}{2i} Ln \frac{iz+1}{iz-1}$$

$$Arsh\, z = Ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$$

$$Arch\, z = Ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$$

$$Arth\, z = \frac{1}{2} Ln \frac{1+z}{1-z}$$

$$Arcth\, z = \frac{1}{2} Ln \frac{z+1}{z-1}$$

Funkcijos tolydumas

- Tarkime, kad $\{z_n\}$ – kompleksinių skaičių seka ir

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

- Sudarykime funkcijos $w = f(z)$ reikšmių seką: $w_n = f(z_n)$.

- Sakoma, kad funkcija $f(z)$ <u>turi ribą A</u>, kai z artėja prie a, jei ši funkcija apibrėžta taško a aplinkoje ir

$$\lim_{n\to\infty} w_n = A,$$

neatsižvelgiant į seką $\{z_n\}$. Tada rašome

$$\lim_{z\to a} f(z) = A.$$

Funkcijos tolydumas

- Tarkime, kad funkcija $f(z)$ apibrėžta taške a ir jo aplinkoje.
- Sakoma, kad ši funkcija yra tolydžioji taške a, jei teisinga lygybė

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a).$$

- Arba

$$\lim_{\substack{x \to a_x \\ y \to a_y}} u(x, y) = u(a_x, a_y), \qquad \lim_{\substack{x \to a_x \\ y \to a_y}} v(x, y) = v(a_x, a_y).$$

Čia

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad a = a_x + ia_y$$

- Kompleksinio kintamojo funkcija $f(z)$ yra tolydi taške a tada ir tik tada, kai **Re** $w = u$, ir **Im** $w = v$ yra dviejų realiųjų kintamųjų tolydžiosios taške (a_x, a_y) funkcijos.

- Funkcija $f(z)$ vadinama tolydžiąja aibėje ***D***, jei ji yra tolydžioji visose aibės taškuose.

- Visos elementariosios funkcijos yra tolydžios jų apibrėžimo srityse.

Komplėksinio kintamojo funkcijos išvestinė

- Tarkime, kad kompleksinio kintamojo funkcija $f(z)$ apibrėžta taško $z=x+iy$ aplinkoje. Pažymėkime argumento z pokyti

$$\Delta z = \Delta x + i \Delta y$$

ir funkcijos pokytį

$$\Delta f(z) = f(z+\Delta z) - f(z).$$

- Funkcijos $f(z)$ išvestinė taške z - tai riba

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}.$$

Kompleksinio kintamojo funkcijos išvestinė

- Funkcija, turinti taške išvestinę, vadinama diferencijuojama tame taške. Diferencijuojama taške funkcija yra tolydi šiame taške

- Funkcija, diferencijuojama ne tik taške, bet ir jo aplinkoje, vadinama analizine šiame taške. Analizinė kiekviename srities taške funkcija vadinama analizine šioje srityje.

- Sandauga $f'(z)\Delta z$ vadinama funkcijos diferencialu ir žymima d$f(z)$. Kai $f(z) = z$, $f'(z) = 1$, ir $\Delta z =$ dz. Taigi,

$$df(z) = f'(z)dz.$$

- *Pastaba. Galioja visų elementariųjų funkcijų lentelė.*

Koši ir Rymano sąlygos

- Tarkime, kad funkcija $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ yra diferencijuojama taške $z = x + iy$.

Tada egzistuoja riba

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y))-(u(x,y)+iv(x,y))}{\Delta x+i\Delta y}.$$

- Kadangi riba egzistuoja, neatsižvelgiant, kaip $z \to z_0$, galima nagrinėti ribą, kai $\Delta x \to 0$, o $\Delta y = 0$:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x+\Delta x,y)+iv(x+\Delta x,y))-(u(x,y)+iv(x,y))}{\Delta x}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

- Apskaičiuokime tą pačią ribą, kai $\Delta y \to 0$, o $\Delta x = 0$:

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(u(x,y+\Delta)+iv(x,y+\Delta))-(u(x,y)+iv(x,y))}{i\Delta y}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}.$$

Koši ir Rymano sąlygos

- Taigi, iš funkcijos $f(z)$ diferencijuojamo gaunamos <u>Koši ir Rymano sąlygos</u>:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}; \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

- Iš Koši-Rymano sąlygų gaunamos kompleksinio kintamojo funkcijos diferencijavimo formulės:

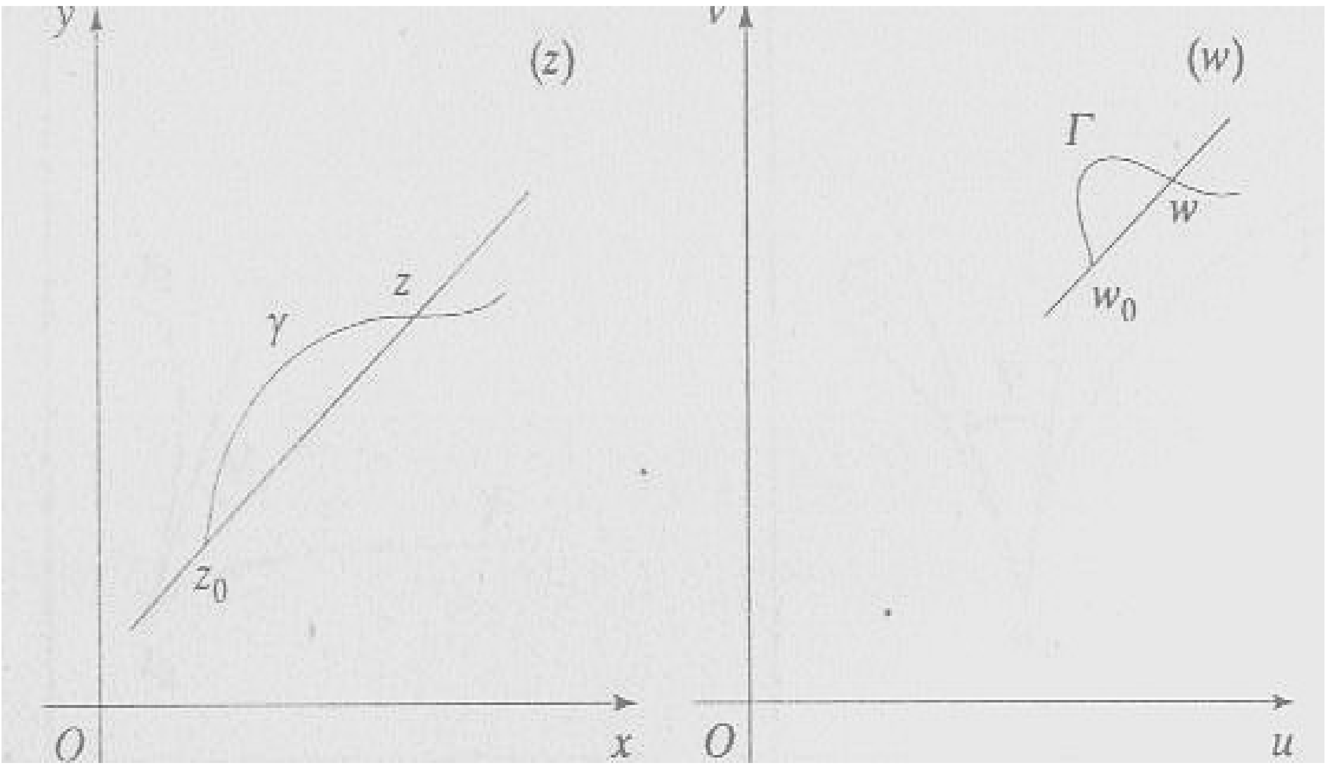
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- Koši ir Rymano sąlygos yra <u>būtinos ir pakankamos</u> funkcijos diferencijavimo sąlygos.

Išvestinės modulio geometrinė prasmė

- Tarkime, kad funkcija $f(z)$ yra analizinė taško z_0 aplinkoje. Per tašką z_0 nubrėžkime glodžiąją kreivę γ. Pažymėkime $z = x + iy$, $w = u + iv$.

- Funkcija $w = f(z)$ atvaizduoja krevę γ į kreivę Γ.



Išvestinės modulio geometrinė prasmė

- Kadangi funkcija $f(z)$ yra analizinė, ji turi išvestinę taške z_0:

$$\left|f'(z)\right| = \lim_{\Delta z \to 0}\left|\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}\right| = \lim_{z \to z_0}\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right|.$$

- Išvestinės modulis rodo, kaip keičiasi santykis

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|},$$

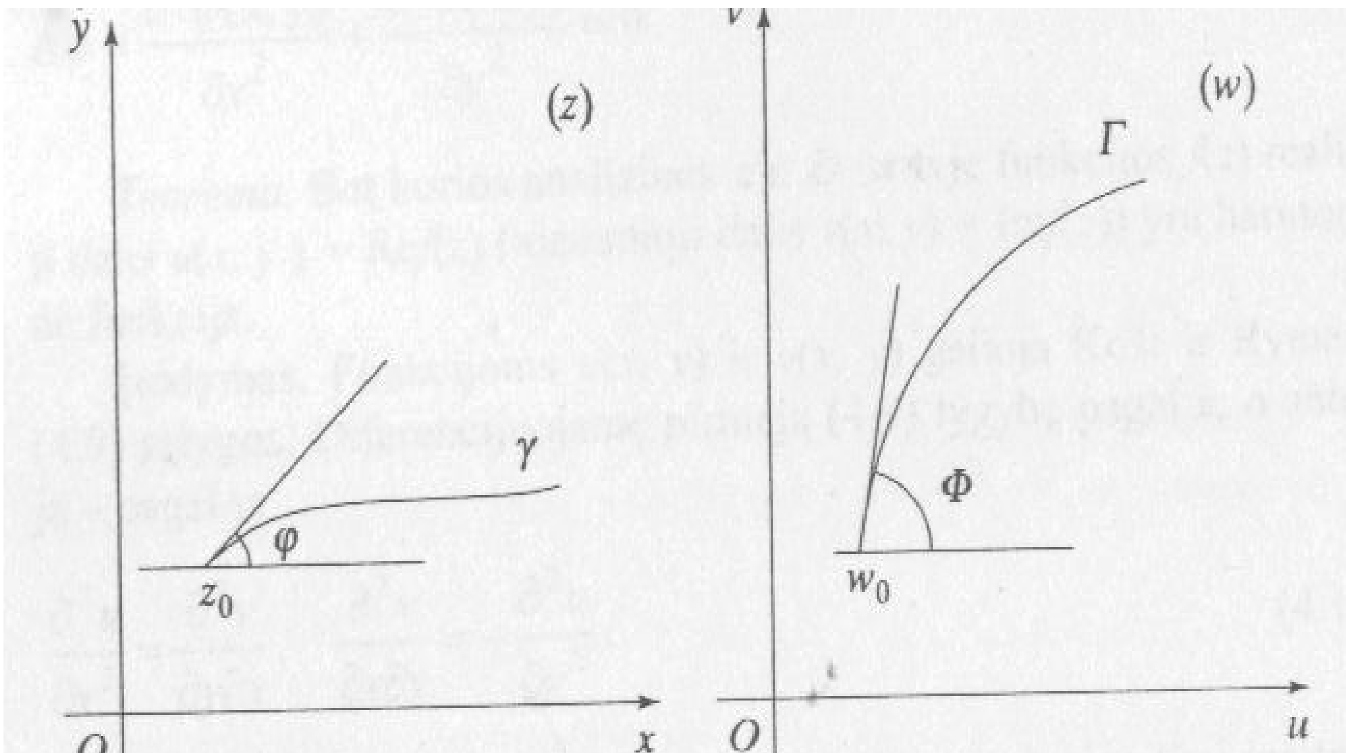
vaizduojant vieną kreivę į kitą. Šis santykis nepriklauso nuo kreivės. Taigi, $|f'(z)|$ yra <u>ištempimo koeficientas</u> taške z_0.

Išvestinės argumento geometrinė prasmė

- Tarkime, kad $f'(z_0) \neq 0$. Tada

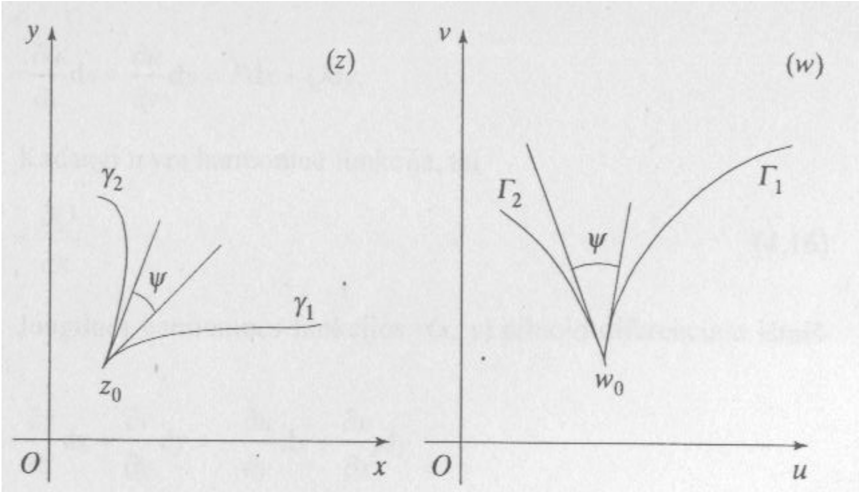
$$arg\ f'(z_0) = arg \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} arg\, \Delta f(z_0) - \lim_{\Delta z \to 0} arg\, \Delta z = \Phi - \phi.$$

- Čia Φ – kampas, kurį sudaro kreivės Γ liestinė taške w_0 su Ou ašimi. φ – kampas, kurį sudaro kreivės γ liestinė taške z_0 su Ox ašimi:



Išvestinės argumento geometrinė prasmė

- Taigi, $\arg f\,'(z_0)$ parodo, kokiu kampu pasisuks kreivės, vaizduojant jas funkcija $f(z)$.
- Nors kampai φ ir Φ priklauso nuo kreivių γ ir Γ, bet šių kampų skirtumas $\Phi - \varphi$ nesikeičia.
- Kampu tarp kreivių γ_1 ir γ_2 taške z_0 vadinamas kampas tarp jų liestinių.



- Kampas tarp bet kurių kreivių γ_1 ir γ_2 vaizduojant jas funkcija $f(z)$ nesikeičia ir lygus $\arg f\,'(z_0) \neq 0$.
- Šia savybę turinčios funkcijos vadinamas <u>konforminiais atvaizdžiais</u>. Analizinė funkcija $f(z)$, kuriai $f\,'(z) \neq 0$ srityje $\boldsymbol{D}$, yra konforminis atvaizdis: kiekviename srities taške kampai tarp glodžiųjų kreivių išlieka tie patys.

Harmoninės funkcijos

- Tarkime, kad funkcija $\varphi(x,y)$ turi antrosios eilės tolydžiasias dalines išvestines.

- Funkcija vadinama harmonine srityje ***D,*** jei ji yra Laplaso lygties sprendinys.

$$\Delta \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

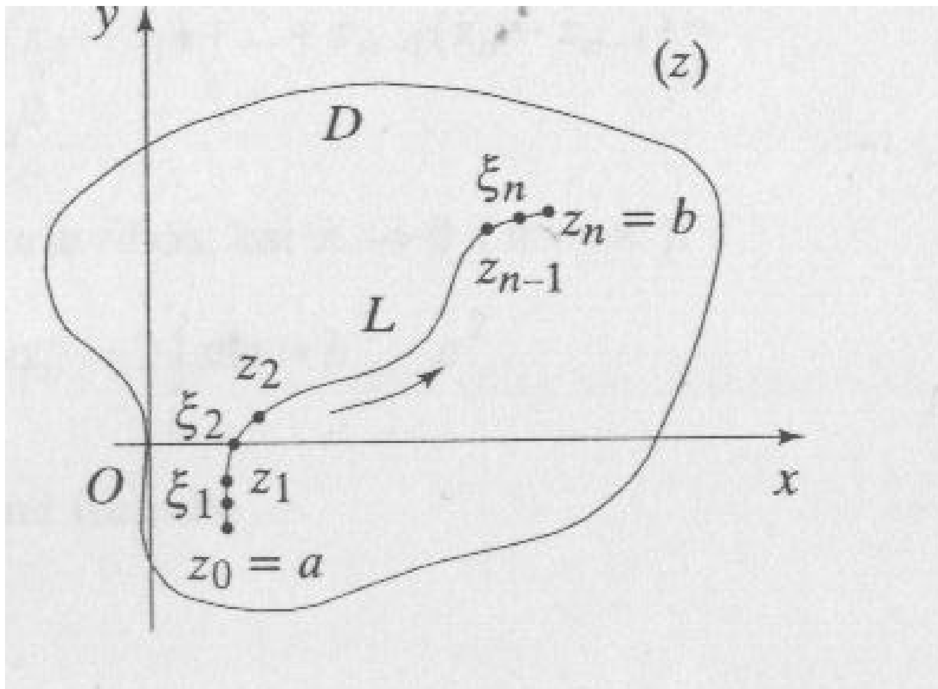
- Bet kurios analizinės funkcijos realioji (arba menamoji) dalis yra harmoninė funkcija.

- Dvi harmoninės funkcijos, susietos Koši-Rymano sąlygomis vadinamos jungtinėmis harmoninėmis funkcijomis.

- Bet kuri harmoninė funkcija yra tam tikros analizinės funkcijos realioji arba menamoji dalis.

Integralo apibrėžimas

- Tarkime, kad srityje ***D*** žinoma dalimis glodžioji orientuota kreivė *L*, ir kreivės taškuose apibrėžta kompleksinio kintamojo funkcija $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$
- Padalijame kreivę *L* į ***n*** dalių: $z_0 = a, z_1, z_2, \ldots, z_n = b$



ir kiekvienoje kreivės dalyje (z_{j-1}, z_j) parenkame po vieną tašką $\xi_j = \eta_j + i\zeta_j$.

Integralo apibrėžimas

- Sudarome **<u>integralinę sumą</u>**

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,\Delta z_j$$

čia

$$\Delta z_j = z_j - z_{j-1} = (x_j + i\,y_j) - (x_{j-1} + i\,y_{j-1}) = (x_j - x_{j-1}) + i\,(y_j - y_{j-1}) = \Delta x_j + i\,\Delta y_{j.}$$

- Pažymėkime

$$\lambda = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left|\Delta z_j\right| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2}$$

- Baigtinė riba

$$\lim_{\lambda \to \infty} S_n = \int_L f(z)\,dz$$

nepriklausanti nuo taškų ξ_j parinkimo ir kreivės L padalijimo į dalis būdo, vadinama funkcijos $f(z)$ <u>integralu kreive L</u>.

Integralo savybės

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta z_j = \sum_{j=1}^{n} \left(u(\nu_j, \zeta_j) + i\,v(\nu_j, \zeta_j)\right)\left(\Delta x_j + i\Delta y_j\right) = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{j=1}^{n} \left(u(\nu_j, \zeta_j)\Delta x_j - v(\nu_j, \zeta_j)\Delta y_j\right) + i\sum_{j=1}^{n} \left(v(\nu_j, \zeta_j)\Delta x_j + u(\nu_j, \zeta_j)\Delta y_j\right).$$

- Perėję prie ribos $\lambda \to 0$, gauname

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int_L v(x, y)dx + u(x, y)dy.$$

- Arba trumpiau,

$$\int_L f(z)dz = \int_L u\,dx - v\,dy + i\int_L v\,dx + u\,dy = \int_L (u + i\,v)(dx + i\,dy).$$

Integralo savybės

- $$\int_L a f(z) + b g(z)\, dz = a \int_L f(z) + b \int_L g(z)$$

- $$\int_{L^{+}} f(z)\, dz = -\int_{L^{-}} f(z)\, dz$$

- Jei $L = L_1 + L_2$, tai

$$\int_L f(z) dz = \int_{L_1} f(z)\, dz + \int_{L_2} f(z)\, dz$$

Integralo įvertinimo teorema

- Tarkime, kad $f(z)$ – tolydžioji funkcija kreivės L taškuose. Pažymėkime

$$M = \max_{z\in L} \left| f(z) \right|,$$

čia l – kreivės L ilgis. Tada

$$\left| \int_L f(z)\, dz \right| \leqslant M\, l.$$

- Jei kreivės L pradinis ir galinis taškai sutampa, tai kreivę L vadinama **uždarąja** ir integralas tokia kreive žymimas

$$\oint_L f(z)\, dz\,.$$

- Jei kreivės apribota sritis lieka iš kairės pusės, tai kreivės L kryptis laikoma teigiama.

Integralo apskaičiavimas

- Tarkime, kad kreivė L išreiškiama parametrinėmis lygtimis

$$L=\left\{z=x+i\,y\,,\,x=\alpha(t),\,y=\beta(t),\,t_0\leqslant t\leqslant t_1\right\}.$$

- Tada dx = α'(t) dt , dy = β'(t) dt ir gauname

$$\int_L f(z)dz=\int_{t_0}^{t_1}\left(u(\alpha(t),\beta(t))\alpha'(t)-v(\alpha(t),\beta(t))\beta'(t)\right)dt+i\int_{t_0}^{t_1}\left(v(\alpha(t),\beta(t))\alpha'(t)+u(\alpha(t),\beta(t))\beta'(t)\right)dt.$$

- Kai $x = t$, $y = y(x)$, $t_0 = x_0$, $t_1 = x_1$, formulė yra tokia:

$$\int_L f(z)dz=\int_{x_0}^{x_1}\left(u(x,y(x))-v(x,y(x))y'(x)\right)dx+i\int_{x_0}^{x_1}\left(v(x,y(x))+u(x,y(x))y'(x)\right)dx$$

- Pažymėję d$z(t)$ = ($x'(t)$+i$y'(t)$)dt = z'(t)dt, formulę galime užrašyti taip:

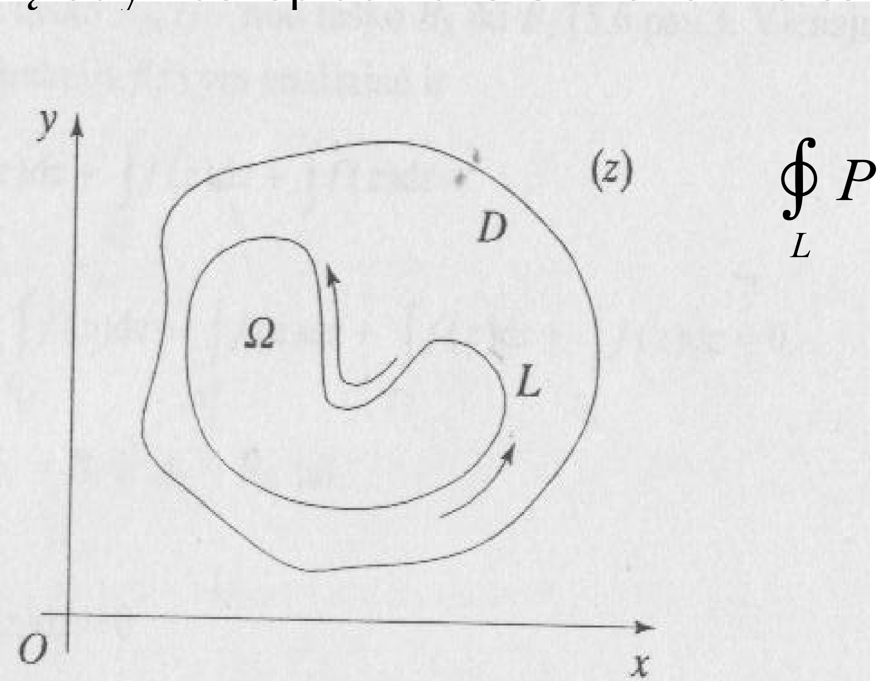
$$\int_L f(z)dz=\int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)dt.$$

Koši integralinė teorema

- Tarkime, kad funkcija $f(z)$ yra analizinė srityje $\boldsymbol{D}$. Uždaroji kreivė L iš $\boldsymbol{D}$ yra dalimis glodžioji, apriboja vienajungę sritį $\boldsymbol{\Omega}$ ir jos taškuose $f(z)$ irgi yra analizinė. Tada funkcijos $f(z)$ integralas uždarąja kreive L lygus nuliui.

$$\oint_L f(z)\,dz = 0.$$

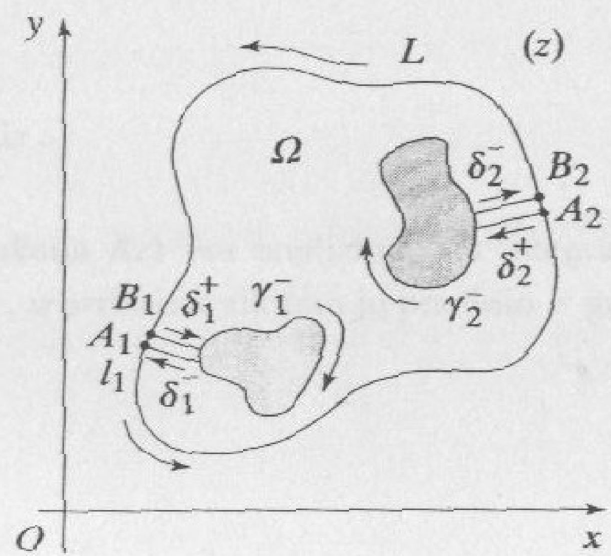
- Įrodymas išplaukia iš Grino formulės kreivinėms integralams:



$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Koši teorema daugiajungei sričiai

- Tarkime, kad Koši integralinės teoremos sąlygose vietoje vienajungės srities **Ω** nagrinėjama daugiajungė sritis, apribota išorinių kontūru L ir vidiniais, vienas su kitu nesikertančiais kontūrais $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Čia $n = 2$:



Pastaba 1.Jei srities siena susideda iš n komponenčių – nesikertančių tolydžiųjų kreivių ar pavienių taškų, tai tokia sritis vadinama ***n-junge***.

Pastaba 2. Kontūrai γ_j^- *turi neigiamą kryptį vidinių sričių atžvilgiu; o Ω - teigiamą.*

- Pjūviais $\delta_j^{\pm}$ pakeiskime sritį Ω - vienajunge sritimi Ω_1, kurios sieną L_1 sudaro kreivės l_1 (nuo A_1 iki A_2), δ_2^+, γ_2^-, δ_2^-, l_2 (nuo B_2 iki B_1), δ_1^+, γ_2^-, δ_1^-.

Koši teorema daugiajungei sričiai

- Vienajungėje srityje Ω_1 funkcija $f(z)$ yra analizinė ir

$$\oint_{L_1} f(z)dz = \int_{l_1} f(z)dz + \int_{\delta_2^{+}} f(z)dz + \int_{\gamma_2^{-}} f(z)dz + \int_{\delta_2^{-}} f(z)dz + .$$

$$+ . \int_{l_2} f(z)dz + \int_{\delta_1^{+}} f(z)dz + \int_{\gamma_1^{-}} f(z)dz + \int_{\delta_1^{-}} f(z)dz = 0.$$

- Jei taškai A_1=B_1, A_2=B_2, tai

$$\int_{\delta_j^{+}} f(z)dz + \int_{\delta_j^{-}} f(z)dz = 0.$$

ir kreivės l_1, l_2, ..., l_n sudaro srities kontūrą L. Taigi, kai n = 2,

$$\int_{l_1} f(z)dz + \int_{l_2} f(z)dz + \int_{\gamma_1^{-}} f(z)dz + \int_{\gamma_2^{-}} f(z)dz = 0.$$

Koši teorema daugiajungei sričiai

- Arba, pakeitus kontūrų kryptį,

$$\oint_L f(z)\,dz - \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz - \oint_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0.$$

- Bendruoju atveju gauname Koši teoremą daugiajungiai sričiai.

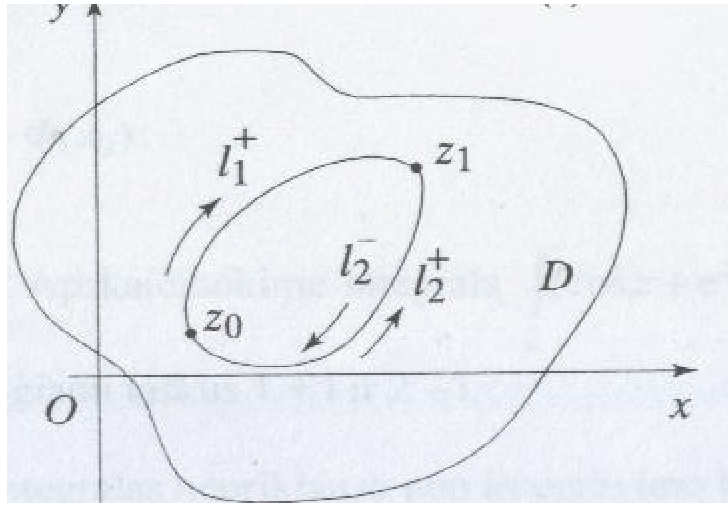
- Daugiajungėje srityje Ω analizinės funkcijos $f(z)$ integralai kontūrams L, γ_1, γ_2, ... , γ_n tenkina lygybę

$$\oint_L f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\gamma_j} f(z)\,dz$$

Pastaba. Visu kontūrų kryptis teigiamos (prieš laikrodžio rodyklę).

Integralas su kintamuoju viršutiniu rėžiu

- Tarkime, kad funkcija $f(z)$ yra analizinė srityje $\boldsymbol{D}$. Du taškus, z_0, z_1 iš $\boldsymbol{D}$ sujunkime kreivėmis l_1^+, l_2^+, kurių kryptis yra nuo taško z_0 iki taško z_1.



- Tada kreivės l_1^+ ir l_2^+ sudaro uždarą kontūrą L ir

$$\oint_L f(z)dz = \int_{l_1^+} f(z)dz + \int_{l_2^-} f(z)dz = \int_{l_1^+} f(z)dz - \int_{l_2^+} f(z)dz = 0$$

arba

$$\int_{l_1^+} f(z)dz = \int_{l_2^+} f(z)dz$$

Integralas su kintamuoju viršutiniu rėžiu

- Taigi, kai funkcija $f(z)$ yra analizinė, jos integralas nepriklauso nuo kreivių l_1^+, l_2^+ parinkimo, o priklauso tik nuo pradinio ir galinio taškų z_0 ir z_1. Pažymėkime

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw.$$

- Galima įrodyti, kad $F(z)$ yra analizinė ir $F'(z) = f(z)$, t.y. F(z) – funkcijos $f(z)$ pirmykštė funkcija. Analizinės funkcijos $f(z)$ pirmykštės funkcijos užrašomos formule

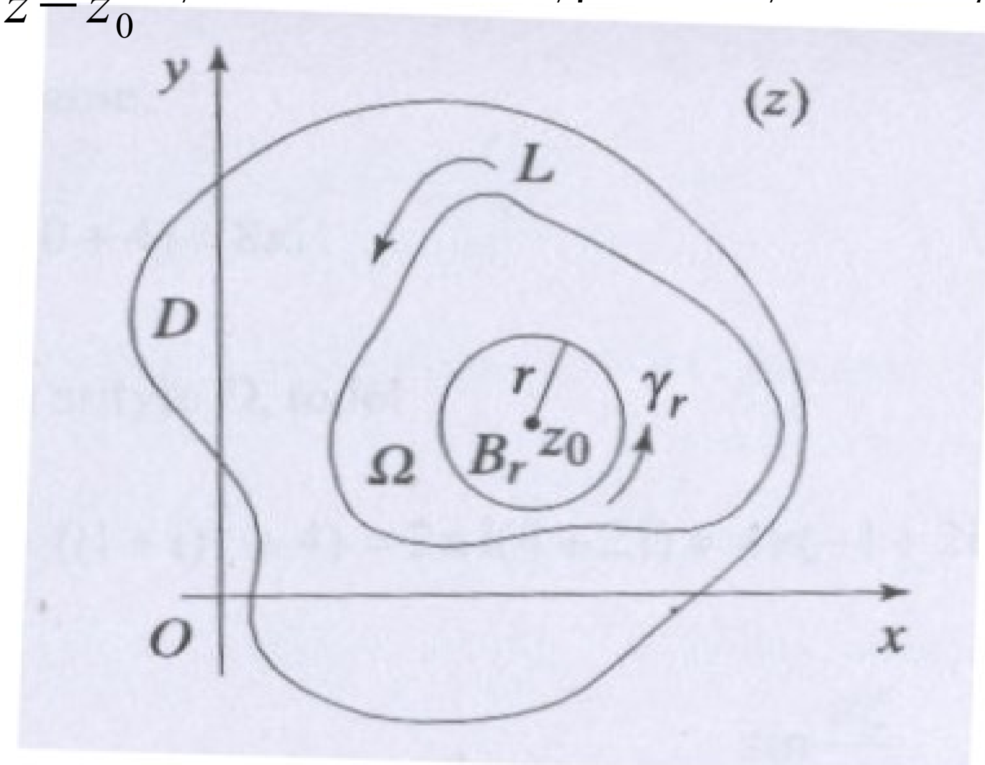
$$\Phi(z)=F(z)+C=\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw+C.$$

ir apibrėžtinį integralą skaičiuojame pagal Niutono-Leibnico formulę:

$$\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw=\Phi(z)-\Phi(z_0).$$

Koši integralinė formulė

- Tarkime, kad funkcija $f(z)$ yra analizinė vienajungėje srityje $\boldsymbol{D}$. Uždaroji kreivė L iš $\boldsymbol{D}$ riboja sritį Ω, taškas z_0 iš Ω yra <u>vidinis</u>.
- Tada funkcija $\dfrac{f(z)}{z-z_0}$ yra analizinė srityje Ω išskyrus tašką z_0.



- Pažymėkime γ_r apskritimą $|z - z_0| = \boldsymbol{r}$ ir parinkime spindulį $r > 0$ taip, kad skritulys $B_r = \{z: 0 < |z - z_0| < r\}$ priklausytų Ω.

Koši integralinė formulė

- Tada pagal Koši formulę dvijungei sričiai teisingos lygybės:

$$\oint_L \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz + f(z_0)\oint_{\gamma_r} \frac{dz}{z-z_0}.$$

- Funkcija $f(z)$ yra analizinė, todėl ji tolydžioji ir

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon, \forall z : |z-z_0| < \delta.$$

- Pirmą integralą galima įvertinti taip:

$$\left|\oint_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| \leqslant M\,l = \frac{\varepsilon}{r}2\pi r = 2\pi\varepsilon, \quad M = \max_{z\in\gamma_r}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{r}$$

- Kadangi ε galima parinkti kiek norima mažą teigiamą skaičių, integralas yra lygus 0. Antras integralas, kaip buvo parodyta anksčiau, lygus $2\pi i$. Taigi,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(s)}{s-z}ds$$

Analizinės funkcijos aukštesniųjų eilių išvestinės

- Tarkime, kad funkcija $f(z)$ yra analizinė srityje $\boldsymbol{D}$. Uždaroji kreivė L iš $\boldsymbol{D}$ riboja sritį Ω, taškas z_0 iš Ω yra <u>vidinis</u>. Žinodami $f(z)$ reikšmes kontūro L taškuose, galima išreikšti $f\,'(z)$ visos srities Ω taškuose.

- Remdamiesi Koši integraline formule, turime

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(s)}{(s-z)(s-z-\Delta z)}\,ds.$$

- Taigi,

$$f\,'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(s)}{(s-z)^2}\,ds.$$

- Bendruoju atveju

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\,ds.$$

Modulio maksimumo principas

- Tarkime, kad funkcija $f(z)$ yra analizinė srityje $\boldsymbol{D}$. Uždaroji kreivė L iš $\boldsymbol{D}$ riboja sritį Ω. Pažymėkime M – didžiausią funkcijos modulio reikšmę kontūro taškuose:

$$M = \max_{z \in L} |f(z)|.$$

- Tada bet kuriame kreivės L taške z :

$$|f^n(z)| = |f(z)|^n \leqslant M^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Funkcija $f^n(z)$ yra analizinė srityje $\boldsymbol{D}$, todėl, pagal Koši integralinę formulę,

$$f^n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f^n(s)}{s - z} ds.$$

Modulio maksimumo principas

- Tegu l – kontūro L ilgis ir $\delta > 0$ – vidinio srities Ω taško z trumpiausias atstumas iki kontūro L:

$$\delta = \min_{s \in L} |s - z|.$$

- Įvertinkime funkcijos $f^n(z)$ modulį :

$$|f(z)|^n = |f^n(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{M^n}{\delta} l, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Iš čia gauname, kad

$$|f(z)| \leqslant M \sqrt[n]{\frac{l}{2\pi\delta}}.$$

- Perėję prie ribos $n \to \infty$, gauname

$$|f(z)| \leqslant M = \max_{z \in L} |f(z)|.$$

- Taigi, analizinės srityje Ω funkcijos modulis įgyja savo didžiausiąją reikšmę srities kontūro L taškuose.

Liuvilio teorema

- Tarkime, kad funkcija $f(z)$ yra analizinė visoje kompleksinėje plokštumoje $\boldsymbol{C}$. Tada visiems $R > 0$ ji yra analizinė skritulyje $|z| < R$. Tarkime, kad funkcija $f(z)$ yra aprėžta visoje kompleksinėje plokštumoje $\boldsymbol{C}$:

$$\exists M > 0: \ |f(z)| < M, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

- Tada visiems $R > 0$ teisingas įvertinimas:

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{|s-z|=R} \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} 2\pi R = \frac{M}{R}.$$

- Kadangi R galima parinkti kiek norima didelį, perėję prie ribos $R \to \infty$, gauname

$$|f'(z)| \leqslant 0 \ \Rightarrow \ f'(z) \equiv 0.$$

- Taigi, jei funkcija $f(z)$ yra analizinė visoje kompleksinėje plokštumoje $\boldsymbol{C}$, tai ji arba <u>neaprėžta</u>, arba <u>lygi konstantai</u>.

Teiloro eilutė

- ***Teorema***. Jei funkcija $f(z)$ yra analizinė taško z = a aplinkoje, tai ši funkcija išreiškiama konverguojančia laipsnine eilute (Teiloro eilute)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

- *Įrodymas*. Tarkime, kad apskritimas L riboja sritį $\Omega\subset\{z:|z-a|<r\}$

- Tada bet kuriame vidiniame Ω taške z:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(s)}{s-z}\,ds$$

be to,

$$\frac{1}{s-z}=\frac{1}{s-a}\,\frac{1}{1-q},\quad q=\frac{z-a}{s-a}.$$

Teiloro eilutė

- Kadangi *s* yra srities Ω kontūro *L* taškas, o z – vidinis srities taškas, tai

$$|z-a|<|s-a|=r \quad \Rightarrow \quad |q|<1.$$

- Taigi,

$$\frac{1}{s-z}=\frac{1}{s-a}\sum_{n=0}^{\infty} q^n=\frac{1}{s-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{s-a}\right)^n$$

ir gauname Teiloro eilutę:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}}\,ds\right)(z-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

- Kai a=0, Teiloro eilutė vadinama Makloreno eilute:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n.$$

Teiloro eilutė

- Teiloro eilutė yra vienintelė.
- Tarkime, egzistuoja kita laipsninė eilutė:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots$$

- Gauname, kad

$$f(a) = c_{0,} \quad f'(a) = c_{1,} \quad \ldots, \quad f^{(n)}(a) = n!\,c_n, \ldots$$

- Taigi, eilutės sutampa, nes $\displaystyle c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$

- Teiloro eilutės konvergavimo spindulys lygus taško a atstumui iki artimiausio *z*, kuriame *f*(*z*) yra <u>nėra</u> <u>analizinė</u>. Tokie taškai vadinami <u>ypatingaisiais</u>.

Makloreno eilutės

•

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sinh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad \ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}.$$

Analizinės funkcijos nuliai

- Taškas z=a vadinamas funkcijos $f(z)$ nuliu, kai $f(a) = 0$.

- Šiuo atveju $f(z)$ Teiloro eilutė taške a neturi nulinio nario $c_0 = f(a) = 0$ ir gali neturėti keliu pirmųjų narių:

$$f(z)=c_k(z-a)^k+c_{k+1}(z-a)^{k+1}+\dots$$

- Jei $f(z)$ nėra konstanta, tai egzistuoja koeficientas $c_k \neq 0$.

- Taškas z=a vadinamas $f(z)$ k-osios eilės nuliu, kai

$$f^{(n)}(a)=0 \quad (0\leqslant n<k), \qquad f^{(k)}(a)\neq 0.$$

- Taigi, nulio eilė yra mažiausias Teiloro eilutės nenulinio koeficiento numeris. Kai $k = 1$, nulis vadinamas paprastuoju.

- Kai z=a yra funkcijos $f(z)$ k eilės nulis, ja galima užrašyti sandauga

$$f(z)=(z-a)^k\varphi(z); \qquad \varphi(z)=c_k+c_{k+1}(z-a)+c_{k+2}(z-a)^2+\dots$$

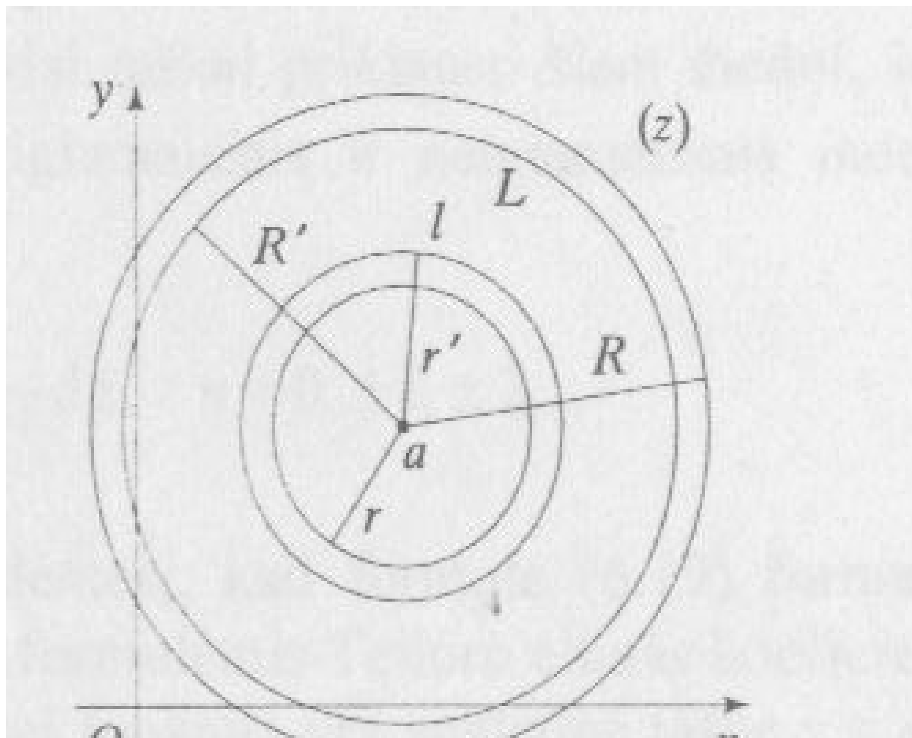
čia $\varphi(z)$ yra analizinė taško z=a aplinkoje ir $\varphi(a) \neq 0$.

Lorano eilutė

- *Teorema*. Kiekviena analizinė žiede $r < |z - a| < R$ funkcija $f(z)$ išskleidžiama konverguojančia šiame žiede eilute

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

- *Įrodymas*. Parinkime skaičius r' ir R': $r < r' < R' < R$ ir pažymėkime apskritimus $l: |z - a| = r'$, $L: |z - a| = R'$.



Lorano eilutė

- Funkcija $f(z)$ yra analizinė žiede $r' \leq |z - a| \leq R'$, todėl, kai z yra žiedo vidinis taškas, galima taikyti Koši integralinę formulę:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(s)}{s-z}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(s)}{s-z}\,ds.$$

- Pirmajame integrale $|z - a| < |s - a| = R'$ ir

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{s-a}\right)^n$$

- Integruodami panariui, gausime

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(s)}{s-z}\,ds = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}}\,ds\right)(z-a)^n.$$

Lorano eilutė

- Kai $|z - a| > |s - a| = r'$, antrąjį integralą galime pertvarkyti panašiai:

$$-\frac{1}{s-z} = -\frac{1}{a-z}\,\frac{1}{1-\dfrac{s-a}{z-a}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(s-a)^{n-1}}{(z-a)^{n}}$$

- Integruodami panariui, gausime

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{l}\frac{f(s)}{s-z}\,ds = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{l} f(s)(s-a)^{n-1}\,ds\right)\frac{1}{(z-a)^{n}}.$$

- Pažymėję

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L}\frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}}\,ds\,; \quad c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{l} f(s)(s-a)^{n-1}\,ds\,, \quad n\in\mathbb{N}_0$$

Lorano eilutė

- Gauname

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

- Ši eilute vadinama Lorano eilute, jos pirmoji (+) dalis – reguliariąją dalimi, jos antroji (-) dalis – pagrindine dalimi.

- Lorano eilutės koeficientus taip pat galima skaičiuoti pagal formule

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}} ds, \quad n\in\mathbb{Z},$$

kur γ - kontūras, priklausantis žiedui $r < |z - a| < R$.

- Jei $f(z)$ analizinė taške z = a, tai Lorano eilutės koeficientai c_n, n = 0, 1, ... sutampa su Teiloro eilutės koeficientais, o c_{-n} = 0. Taigi, šiuo atveju Lorano eilutė neturi pagrindinės dalies ir sutampa su Teiloro eilute.

Ypatingieji taškai

- Taškas z_0 vadinamas $f(z)$ izoliuotuoju ypatinguoju tašku, jeigu $f(z)$ nėra analizinė taške z_0, tačiau yra analizinė jo pradurtoje aplinkoje $0 < |z - z_0| < r$.

- Tarkime, kad z_0 yra funkcijos $f(z)$ izoliuotasis ypatingasis taškas. Tada šio taško pradurtoje aplinkoje $0 < |z - z_0| < r$ analizinę funkciją $f(z)$ galima išskleisti konverguojančiąja Lorano eilute

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots$$

Ypatingieji taškai

Izoliuotasis ypatingasis taškas $z = z_0$ vadinamas funkcijos $f(z)$

- <u>pašalinamuoju ypatinguoju tašku</u>, jei Lorano eilute neturi pagrindinės dalies, t.y. $c_{-1} = c_{-2} = \ldots = 0$;

- <u>k eilės poliumi</u>, jei Lorano eilutės pagrindinė dalis turi tik baigtinį narių skaičių ir $c_{-k} \neq 0$, $c_{-(k+1)} = c_{-(k+2)} = \ldots = 0$; kai k = 1, taškas $z = z_0$ vadinamas pirmosios eilės poliumi arba paprastuoju poliumi;

- esmingai ypatinguoju tašku, jei Lorano eilutės pagrindinė dalis turi be galo daug narių, t.y.

$$\forall\, n>0 \quad \exists\, k>n: \quad c_{-k} \neq 0.$$

Ypatingieji taškai

- Tarkime, kad z_0 yra funkcijos $f(z)$ pašalinamasis ypatingasis taškas. Tuomet (iš Lorano eilutės) gauname, kad egzistuoja riba

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = c_{0.}$$

- *Teorema*. Jei funkcija $f(z)$ ypatingajame taške z_0 turi baigtinę ribą, tai šis taškas yra pašalinamasis ypatingasis taškas.

Ypatingieji taškai

- Tarkime, kad z_0 yra funkcijos $f(z)$ k eilės polius. Tuomet (iš Lorano eilutės) gauname

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^k}\left(c_0(z-z_0)^k+c_1(z-z_0)^{k+1}+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{k-1}+\ldots+c_{-(k-1)}(z-z_0)+c_{-k}\right).$$

- Pažymėję $\varphi(x)$ Teiloro eilutę šioje išraiškoje, gauname, kad

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k}.$$

- Funkcija $\varphi(x)$ yra analizinė taške z_0 ir $\varphi(z_0) = c_{-k} \neq 0$. Iš čia gauname, kad

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty,$$

t.y. funkcijos modulis $|f(z)|$ neaprėžtai didėja, kai $z \to z_0$.

Ypatingieji taškai

- Teisingas ir atvirkštinis teiginys: jei funkcijos modulis $|f(z)|$ neaprėžtai didėja, kai $z \to z_0$, tai z_0 yra funkcijos polius.

- Jei taškas z_0 yra funkcijos $f(z)$ k eilės polius, tai egzistuoja riba

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = c_{-k} \neq 0.$$

- Funkcija $1/f(z)$ taške z_0 turi k eilės nulį.

- Tarkime, kad z_0 yra funkcijos $f(z)$ esmingai ypatingasis taškas. Tada riba

$$\lim_{z \to z_0} f(z)$$

neegzistuoja (priešingu atveju – tai būtų polius arba pašalinamasis ypatingasis taškas)

Ypatingieji taškai

Kriterijus ypatingojo taško tipui nustatyti yra riba $\lim_{z \to z_0} f(z)$

- Jei riba egzistuoja ir yra baigtinė, taškas z_0 yra pašalinamasis ypatingasis taškas.

- Jei riba yra begalinė, taškas z_0 yra polius, kurio eilę galima rasti iš formulės

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = c_{-k} \neq 0.$$

- Jei riba neegzistuoja, taškas z_0 yra esmingai ypatingasis taškas.

Ypatingasis taškas $z = \infty$

- Be galo nutolusio taško stereografinis vaizdas yra «šiaurės polius» N it jo aplinka yra $|z| > R$, t.y. tam tikro skritulio išorė.

- Pažymėkime $w = 1/z$ ir išskleiskime funkciją $\varphi(w) = f(1/w) = f(z)$ taško $w=0$ aplinkoje $0 < |w| < r$ Lorano eilute:

$$\varphi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n w^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{-n}}{w^n}.$$

- Pakeitę žymėjimus, gauname

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n.$$

- Tai ir yra funkcijos $f(z)$ Lorano eilutė srityje $|1/z| < r$ arba $|z| > R = 1/r$, t.y. be galo nutolusio taško aplinkoje.

- Čia Lorano eilutės pirmoji dalis vadinama *reguliariąja dalimi*, o antroji dalis (turinti teigiamuosius laipsnius) – vadinama *pagrindine dalimi*.

Ypatingasis taškas $z = \infty$

- Jei Lorano eilutė neturi pagrindinės dalies, tai taškas $z = \infty$ vadinamas pašalinamuoju ypatinguoju tašku. Gauname

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = c_0.$$

- Jei ši riba yra lygi nuliui, tai taškas $z = \infty$ vadinamas funkcijos $f(z)$ nuliu.

- Sakoma, kad funkcija $f(z)$ taške $z = \infty$ turi k eilės nulį, jei reguliariosios dalies koeficientai $c_0 = c_{-1} = ... = c_{-k+1} = 0$, ir $c_{-k} \neq 0$.

Ypatingasis taškas $z = \infty$

- Kai Lorano eilutės pagrindinė dalis turi tik baigtinį narių skaičių, ir $c_k \neq 0$, $c_{k+1} = c_{k+2} = \ldots = 0$, tai sakoma, kad taškas $z = \infty$ yra funkcijos $f(z)$ k eilės polius. Tokiu atveju

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty .$$

- Be to,

$$\lim_{z\to\infty} z^{-k} f(z) = c_{-k} \neq 0 ,$$

ir $f(z)$ galima išreikšti kaip

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^k} ,$$

čia $\varphi(z)$ – analizinė taško $z = \infty$ aplinkoje funkcija ir

$$\lim_{z\to\infty} \varphi(z) = c_{-k} \neq 0 .$$

- Jei pagrindinė Lorano eilutės dalis turi be galo daug nariu, tai taškas $z = \infty$ vadinamas esmingai ypatinguoju tašku. Riba $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ neegzistuoja.

Reziduumai

- Tarkime, kad $z = z_0$ yra funkcijos $f(z)$ izoliuotasis ypatingasis taškas. Išskleiskime funkciją Lorano eilute šio taško pradurtoje aplinkoje $0 < |z - z_0| < r$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

- Lorano eilutės koeficientas c_{-1} vadinamas funkcijos $f(z)$ reziduumu taške $z = z_0$ ir žymimas

$$c_{-1} = \underset{z = z_0}{Res}\, f(z).$$

Reziduumai

- Kadangi Lorano eilutės koeficinetai skaičiuojami pagal formulę

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}} ds, \quad n \in \mathbb{Z},$$

tai reziduumo išraiška yra

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz;$$

čia γ gali būti ne tik bet kuris apskritimas $|z - z_0| = \delta < r$, bet ir uždaroji kreivė, ribojanti sritį, kuriai priklauso taškas $z = z_0$ ir kurioje nėra kitų funkcijos $f(z)$ ypatingųjų taškų.

Reziduumai

- Jei taškas $z = z_0$ nėra funkcijos $f(z)$ ypatingasis taškas, tai integralas lygus nuliui, ir funkcijos rezuduumas taške $z = z_0$ lygus nuliui.

- Jei taškas $z = z_0$ yra funkcijos $f(z)$ pašalinamasis ypatingasis taškas, tai Lorano eilutė neturi pagrindinės dalies ir rezuduumas taške $z = z_0$ lygus nuliui.

- Taigi reziduumus reikia skaičiuoti tik poliuje ir esmingai ypatingajame taške.

- Jei taškas $z = z_0$ yra funkcijos $f(z)$ pirmosios eilės polius, tai

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}\left(c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + \ldots\right)$$

ir

$$c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0) f(z).$$

Reziduumai

- Jei taškas $z = z_0$ yra funkcijos $f(z)$ k eilės polius, tai reziduumą galima skaičiuoti taip:

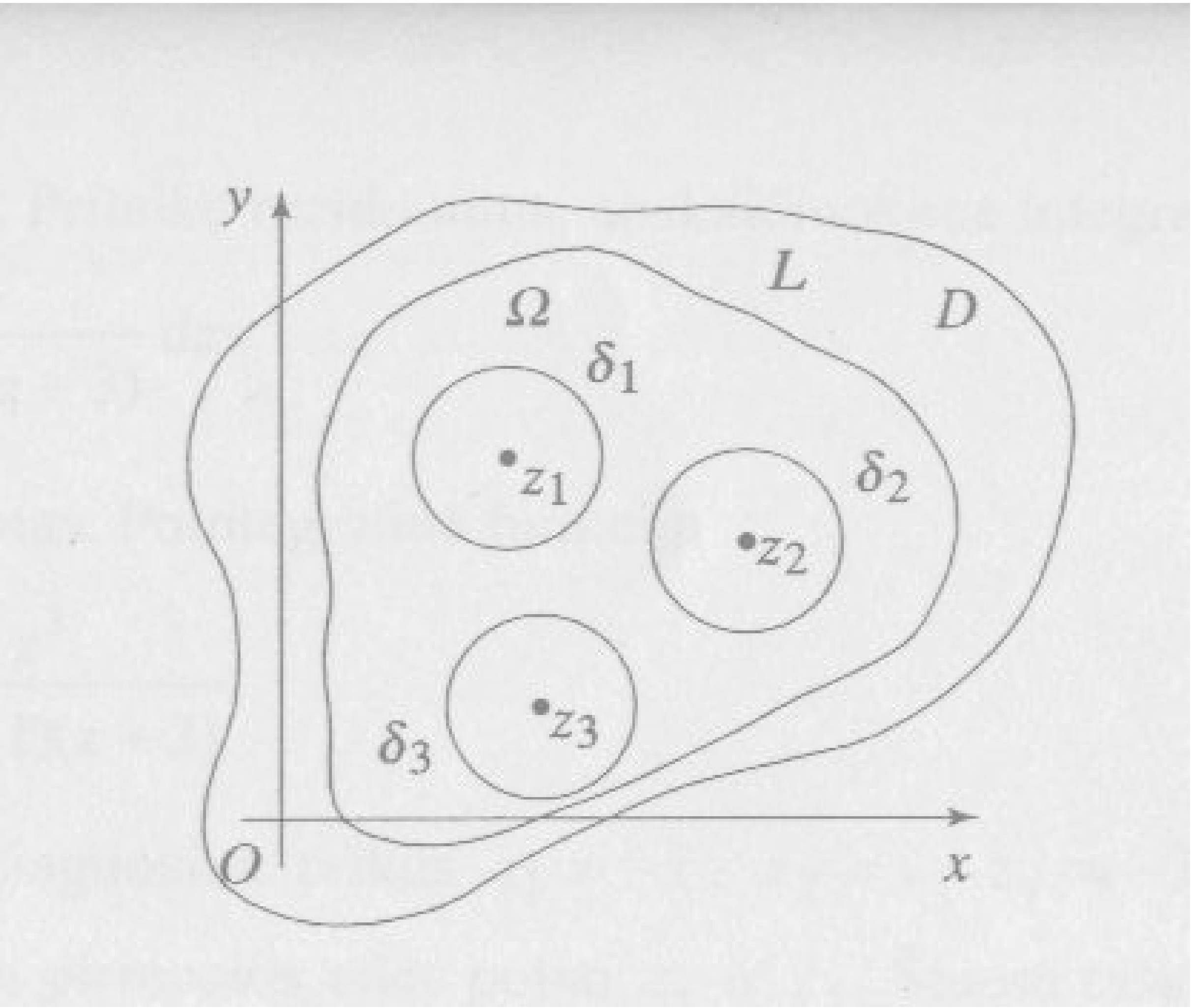
$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z-z_0)^k f(z) \right).$$

- Dar viena formulė reziduumui pirmosios eilės poliuje skaičiuoti. Tarkime, kad $f(z) = \varphi(z) / \psi(z)$, kai $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Tada

$$c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z) - \psi(z_0)} = \frac{\varphi(z)}{\psi'(z_0)}.$$

Pagrindinė reziduumų teorema

- Tarkime, kad funkcija $f(z)$ yra analizinė srityje ***D,*** išskyrus baigtinį skaičių izoliuotųjų ypatingųjų taškų $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Uždaroji kreivė L riboja sritį Ω iš ***D,*** $f(z)$ yra analizinė kreivės L taškuose ir visi taškai $z_1, z_2, \ldots, z_n$ priklauso Ω.



Pagrindinė reziduumų teorema

- Tada

$$\oint_L f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z).$$

- *Įrodymas*. Parinkime $r > 0$ tokį, kad visi skrituliai $|z - z_j| < r$ būtų srityje Ω. Pažymėję δ_j apskritimus $|z - z_j| = r$, pagal Koši integralinę teoremą daugiajungei sričiai gauname

$$\oint_L f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\delta_j} f(z)\,dz.$$

Pritaikę formulę

$$\operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta_j} f(z)\,dz,$$

gauname teoremos teiginį.

Reziduumas be galo nutolusiame taške

- Tarkime, kad be galo nutolusio taško $z = \infty$ aplinkoje funkcija $f(z)$ išskleista Lorano eilute

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n .$$

- Šios Lorano eilutės pirmoji dalis vadinama *reguliariąja dalimi*, o antroji dalis (turinti teigiamuosius laipsnius) – vadinama *pagrindine dalimi*.

- Funkcijos $f(z)$ reziduumu be galo nutolusiame taške $z = \infty$ vadinamas Lorano eilutės reguliariosios dalies koeficientas c_{-1}, paimtas su priešingu ženklu:

$$\underset{z=\infty}{Res}\, f(z) = -c_{-1} .$$

Reziduumas be galo nutolusiame taške

- Tarkime, kad funkcija $f(z)$ yra analizinė visoje kompleksinėje plokštumoje, išskyrus baigtinį skaičių izoliuotųjų ypatingųjų taškų $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Parinkime $R>0$ tokį, kad visi $|z_j| < R$. Tada, pažymėję L apskritimą $|z| = R$, gauname, kad

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \underset{z=z_j}{Res} f(z).$$

- Apeidami kreivę L neigiamąja kryptimi, turime

$$\oint_{L^-} f(z)dz = 2\pi i \underset{z=\infty}{Res} f(z).$$

- Sudėję formulės, kairėje pusėje gausime nulį. Taigi įrodyta tokia *teorema*:

- Jei funkcija $f(z)$ yra analizinė išplėstinėje kompleksinėje plokštumoje, išskyrus baigtinį skaičių izoliuotųjų ypatingųjų taškų $z_1, z_2, \ldots, z_n$, tai visų reziduumų suma lygi nuliui:

$$\sum_{j=1}^{n} \underset{z=z_j}{Res} f(z) + \underset{z=\infty}{Res} f(z) = 0.$$

Trigonometrinių reiškinių integravimas

- Tarkime, kad $R(u,v)$ yra racionalioji funkcija. Realiojo kintamoje integrale

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt$$

įveskime naują kintamąjį $z = e^{it}$. Tuomet

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad dt = \frac{dz}{iz}$$

- Kai $0 \le t \le 2\pi$, parametrinė lygtis $z = e^{it}$ reiškia apskritumą $|z| = 1$. Taigi

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz}.$$

Racionaliųjų funkcijų netiesioginiai integralai

- Tarkime, kad $P_n(x)$ yra n laipsnio daugianaris su realiaisiais koeficientais, o $Q_{2m}(x)$ – $2m$ laipsnio daugianaris su realiaisiais koeficientais. Be to, $2m - n \geq 2$ ir lygties $Q_{2m}(x) = 0$ visos šaknys $z_1, z_2, \ldots, z_{2m}$ turi nenulinę menamąją dalį. Tokių atvejų, kai skaičius z_j yra šaknis, jo kompleksinis jungtinis skaičius irgi yra lygties $Q_{2m}(x) = 0$ šaknis. Skaičius $z_j = \alpha_j + i\,\beta_j$ sunumeruokime taip:

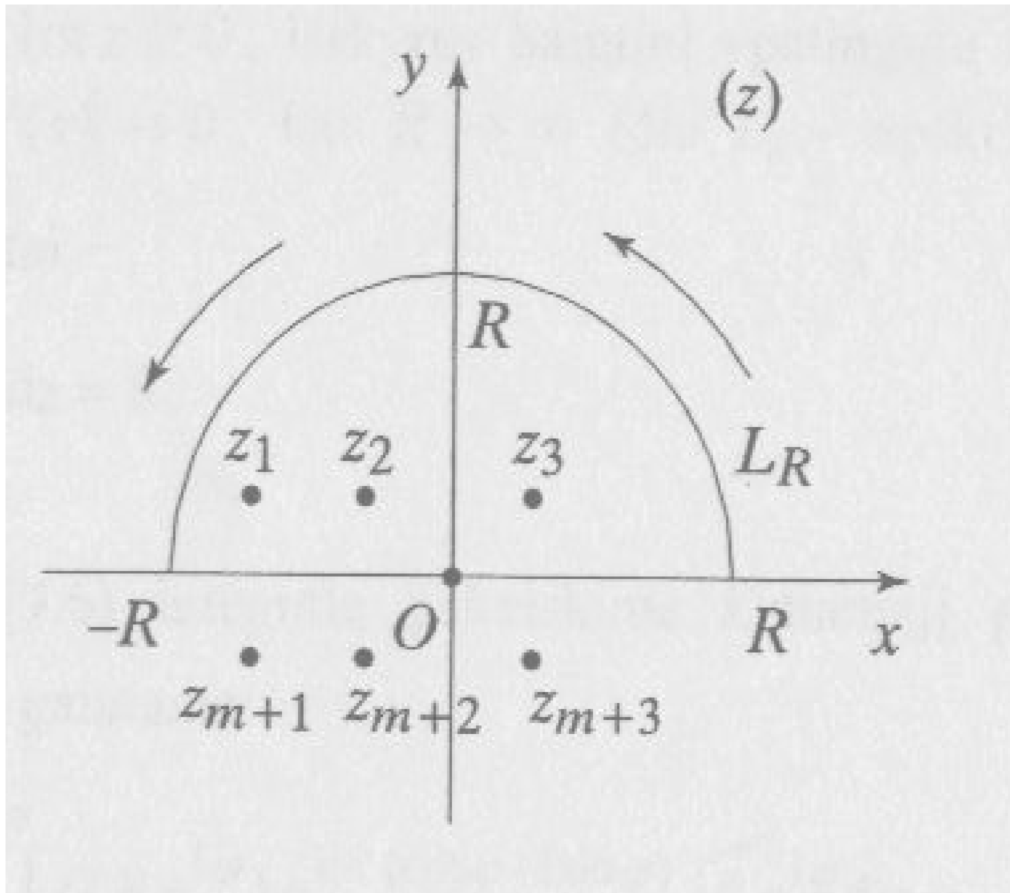
$$
\begin{array}{lll}
z_1 = \alpha_1 + i\,\beta_1, & z_{m+1} = \alpha_1 - i\,\beta_1, & \beta_1 > 0; \\
z_2 = \alpha_2 + i\,\beta_2, & z_{m+2} = \alpha_2 - i\,\beta_2, & \beta_2 > 0; \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
z_m = \alpha_m + i\,\beta_m, & z_{2m} = \alpha_m - i\,\beta_m, & \beta_m > 0.
\end{array}
$$

- Pažymėkime $f(z) = P_n(x) \,/\, Q_{2m}(x)$ ir įrodykime formulę

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z).$$

Racionaliųjų funkcijų netiesioginiai integralai

- Parinkime $R>0$ tokį, kad visi $|z_j| < R$. Pažymėkime L_R apskritimo $|z| = R$ viršutinę dalį. Tuomet uždaroji kreivė L yra pusapskritimio L_R ir atkarpos $[-R; R]$ sąjunga:



Racionaliųjų funkcijų netiesioginiai integralai

- Iš pagrindinės reziduumų teoremos gauname:

$$\oint_L f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{L_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \underset{z=z_j}{Res}\, f(z).$$

- Kai $|z| = R$, tai iš sąlygos $2m - n \geq 2$ gauname, kad egzistuoja tokia $C > 0$, kad

$$|f(z)| < \frac{C}{z^{2m-n}} < \frac{C}{|z|^2} = \frac{C}{R^2}.$$

- Pritaikome integralo įvertinimo formulę:

$$\left|\int_{L_R} f(z)\,dz\right| < \frac{C}{R^2}\pi R = \frac{\pi C}{R}.$$

- Perėję prie ribos, kai $R \to \infty$, gauname formulę

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \underset{z=z_j}{Res}\, f(z).$$

Žordano lema

- Tarkime, kad funkcija $f(z)$ yra analizinė pusplokštumėje Im $z \geq 0$, išskyrus baigtinį ypatingųjų taškų skaičių. Jei L_R - apskritimo $|z| = R$ viršutinė dalis ir

$$\lim_{R\to\infty} M_R = \lim_{R\to\infty} \max_{z\in L_R} \left| f(z) \right| = 0,$$

tai

$$\lim_{R\to\infty} \int_{L_R} f(z) e^{itz} dz = 0.$$

- *Įrodymas*. Integrale darome keitinį $z = R e^{i\varphi}$. Gauname

$$\int_{L_R} f(z) e^{itz} dz = \int_0^\pi f(Re^{i\varphi}) e^{itR(\cos\varphi + i\sin\varphi)} iRe^{i\varphi} d\varphi = .$$

$$.= \int_0^\pi f(Re^{i\varphi}) e^{-Rt\sin\varphi} e^{itR\cos\varphi + i\varphi} iRd\varphi.$$

Žordano lema

- Pastebėję, kad teisinga nelygybė sin φ ≥ 2φ/π, kai 0 ≤ φ ≤ π/2, įvertiname integralą:

$$\left|\int_{L_R} f(z)e^{itz}dz\right| \leqslant R M_R \int_0^{\pi} e^{-Rt\sin\varphi} d\varphi = .$$

$$.= 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\sin\varphi} d\varphi \leqslant 2RM_R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\frac{2}{\pi}\varphi} d\varphi = .$$

$$.= \frac{2RM_R}{-Rt\frac{2}{\pi}}\left(e^{-Rt\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}} - 1\right) = \frac{\pi}{t} M_R\left(1 - e^{-tR}\right) \to 0, \quad kai \quad R \to 0.$$

- Lema įrodyta.

Trigonometrinių funkcijų netiesioginiai integralai

- Tarkime, kad funkcijai $f(z)$ galioja Žordano lemos sąlygos.
- Pažymėję $L = L_R \cup [-R; R]$, kai $R \to \infty$, gauname lygybę

$$\int_L f(z) e^{itz} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \left(f(z) e^{itz} \right)$$

arba

$$\int_{L_R} f(z) e^{itz} dz + \int_{-R}^{R} f(x) e^{itx} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \left(f(z) e^{itz} \right);$$

čia $z_1, z_2, \ldots , z_m$ - funkcijos $f(z)$ ypatingieji taškai, kurių Im $z_m > 0$. Taigi, kai $R \to \infty$, ir $t > 0$, iš Žordano lemos gauname:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{itx} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \left(f(z) e^{itz} \right).$$

Trigonometrinių funkcijų netiesioginiai integralai

- Pritaikę Eulerio formulės, gauname dvi lygybes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos tx\,dx = \Re\left(2\pi i \sum_{j=1}^{m} \underset{z=z_j}{Res}\left(f(z)e^{itz}\right)\right).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin tx\,dx = \Im\left(2\pi i \sum_{j=1}^{m} \underset{z=z_j}{Res}\left(f(z)e^{itz}\right)\right).$$

- Kai funkcija $f(z)$ yra lyginė, antras integralas lygus nuliui, o pirmą formulę galima užrašyti taip:

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos tx\,dx = \Re\left(\pi i \sum_{j=1}^{m} \underset{z=z_j}{Res}\left(f(z)e^{itz}\right)\right).$$

- Kai funkcija $f(z)$ yra nelyginė, gauname formulę

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin tx\,dx = \Im\left(\pi i \sum_{j=1}^{m} \underset{z=z_j}{Res}\left(f(z)e^{itz}\right)\right).$$